Transfert de rayonnement
III
Transfert radiatif avec diffusion

Emmanuel Marcq

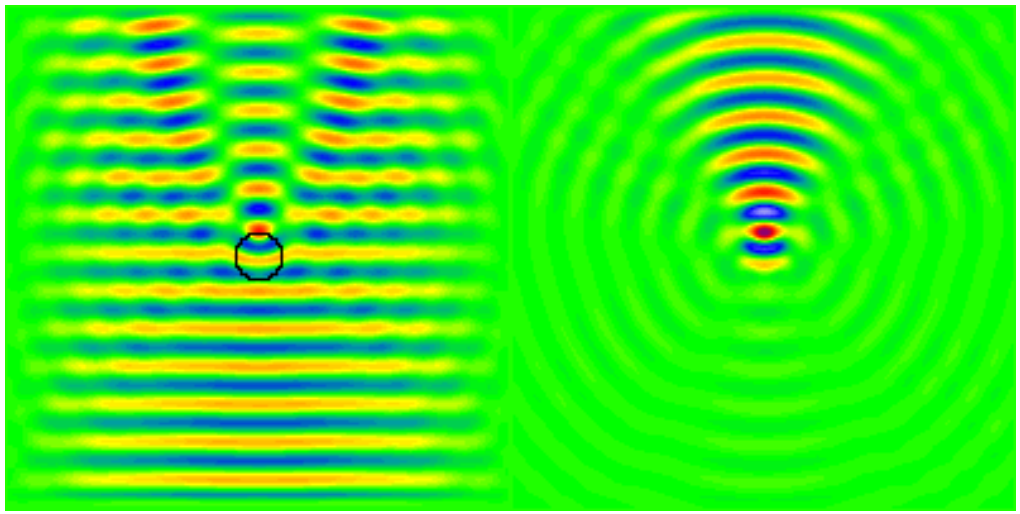
LATMOS, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines

M2 Planétologie et Exploration Spatiale – 2026-2027

Nature physique de la diffusion

- L'interaction entre la matière et une onde électromagnétique incidente peut en détourner une partie vers une autre direction.
- Diffusion à la même fréquence que le champ incident : **diffusion cohérente**

- Introduit une **extinction** supplémentaire, en plus de l'absorption (où l'énergie électromagnétique incidente est convertie en d'autres formes d'énergie).



Extinction

- **Extinction = Absorption + Diffusion**
- On note le coefficient linéique d'absorption $k_{\text{abs}} = d\tau_{\text{abs}}/ds$, le coefficient linéique de diffusion $k_{\text{sca}} = d\tau_{\text{sca}}/ds$ et celui d'extinction $k_{\text{ext}} = d\tau/ds$

Définition de ϖ (aussi noté ϖ_0)

$$\varpi = \frac{k_{\text{sca}}}{k_{\text{ext}}} = \frac{k_{\text{ext}} - k_{\text{abs}}}{k_{\text{ext}}} = \frac{k_{\text{sca}}}{k_{\text{sca}} + k_{\text{abs}}}$$

- $0 < \varpi < 1$ (sans unité)

  $\varpi = 0$ Extinction entièrement due à l'absorption
  Pas de diffusion.

  $\varpi = 1$ Extinction entièrement due à la diffusion
  Pas d'absorption

- ϖ est une fonction de la longueur d'onde/de la fréquence/du nombre d'onde : ϖ_λ ou ϖ_ν ou ϖ_σ.

Signification

- Décrit la **répartition angulaire** (θ',φ') des rayons diffusés par rapport à la direction du rayon incident (θ,φ).
- C'est une **distribution de probabilité** $P(\theta,\varphi;\theta',\varphi')$:

$$dP\left[(\theta,\varphi)\to(\theta',\varphi')\right] = P(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\,d\Omega'$$

- Unité de P : sr^{-1}

Caractéristiques

- **Normation**

$$\iint_{\theta',\varphi'} P(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\,d\Omega' = \int_{\varphi'=0}^{2\pi}\int_{\mu'=-1}^{1} P(\mu,\varphi;\mu',\varphi')\,d\mu'\,d\varphi' = 1$$

- En général, P ne dépend que (du cosinus) de l'angle Θ entre le rayon incident et le rayon diffusé : $P(\theta,\varphi;\theta',\varphi') = p(\cos\Theta)$.
  - En convention usuelle plan-parallèle, on a : $\cos\Theta = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)\,(1-\mu'^2)}\cos(\varphi'-\varphi)$.
  - Exemple : diffusion isotrope, $p(\cos\Theta) = \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{sr}^{-1}$.

Autre convention (P sans unité)

$dP = Pd\Omega \times 4\pi\mathrm{sr}$. En ce cas, $\iint Pd\Omega' = 4\pi$ sr et $p = 1$ pour la diffusion isotrope.

Nouvelle forme du terme source S_ν

- Loi de Kirchhoff émissivité $(1-\varpi) < 1$ pour la source thermique
- Contribution diffusive tout rayon (μ',φ') **peut** se trouver en partie diffusé dans la direction du rayon étudié.

$$I_\nu(0;\mu,\varphi) = I_\nu(\tau_\nu^*;\mu,\varphi)e^{-\tau_\nu^*/\mu} + \int_{\tau'_\nu=0}^{\tau_\nu^*} S_\nu(\tau'_\nu;\mu,\varphi)e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}}\,\frac{d\tau'_\nu}{\mu}$$

avec

$$S_\nu(\tau_\nu;\mu,\varphi) = (1-\varpi)\,B_\nu\left[T(\tau_\nu)\right] + \varpi \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} I_\nu(\tau_\nu;\mu',\varphi')P(\mu',\varphi';\mu,\varphi)\,d\mu'\,d\varphi'$$

Problème

- Les différents rayons se mélangent les uns aux autres.
- Résolution simultanée pour toutes les directions : **Pas de solution explicite en général !**
  - Mais émission thermique très souvent négligeable aux courtes longueurs d'onde (où la diffusion devient importante).

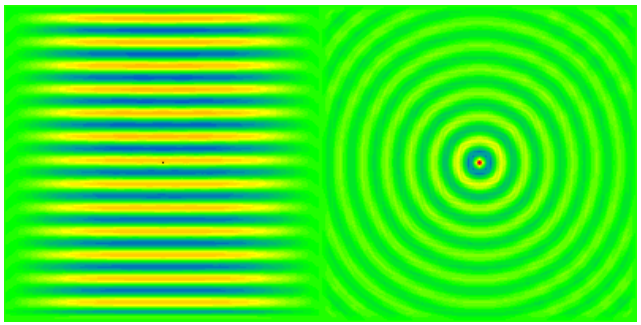
Lorsque les particules diffusives sont de taille très inférieure à λ.

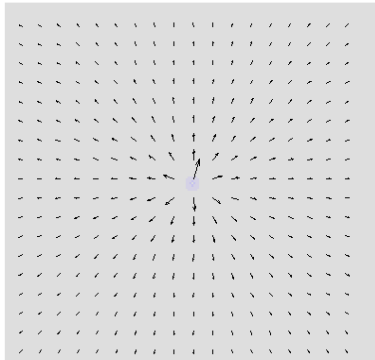
$$P(\Theta) = \frac{3}{16\pi}\left(1+\cos^2\Theta\right)$$

$$\sigma_\lambda = \frac{128\pi^5\alpha^2}{3\lambda^4}$$

α : polarisabilité des particules diffusives.

- Dépendance en λ^{-4} : les courtes longueurs d'onde sont davantage affectées.
- Diffusion polarisante, non isotrope.
- Exemple typique : bleu du ciel.





Section efficace σ_λ

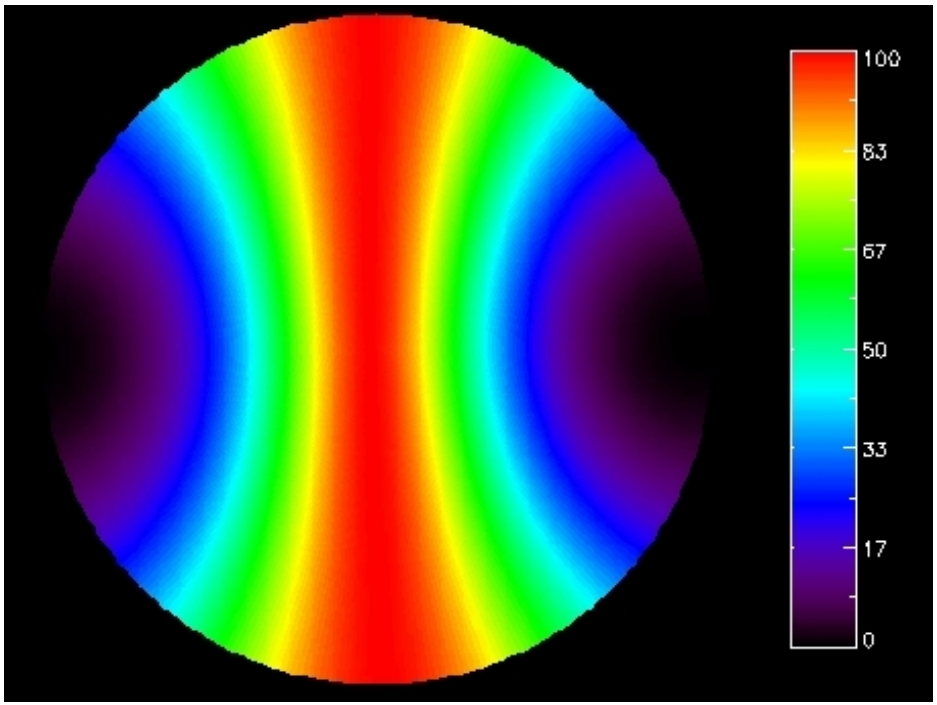
- He (minimal)
  $5{,}8\,10^{-30}\,\mathrm{cm}^2/\lambda^4\,[\mu\mathrm{m}]$
- CO_2 (maximal)
  $8{,}8\,10^{-28}\,\mathrm{cm}^2/\lambda^4\,[\mu\mathrm{m}]$
- **Négligeable** pour
  $\lambda > 1\,\mu\mathrm{m}$ et $P < 10\,\mathrm{bar}$

Polarisation

- Degré de polarisation linéaire δ en simple diffusion :

$$\delta = \frac{\sin^2\Theta}{1+\cos^2\Theta}$$

- Maximal à angle droit de la direction de la source



Degré de polarisation linéaire Rayleigh [%] avec source sur l'horizon

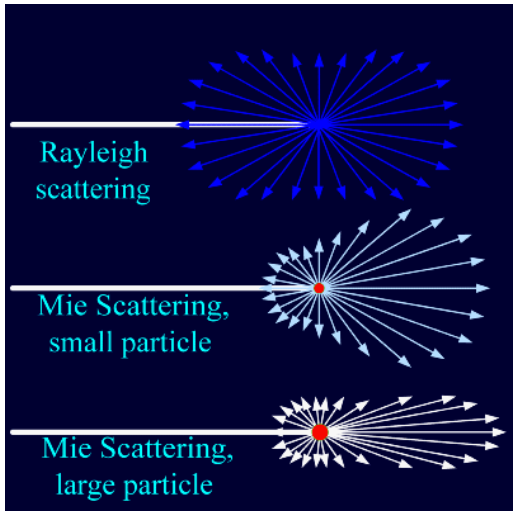
Domaine d'application

- particules **sphériques** de rayon r quelconque par rapport à λ et d'indice de réfraction (complexe) connu.
- s'applique **très mal** aux particules non sphériques !

Exemples Aérosols : poussières, nuages

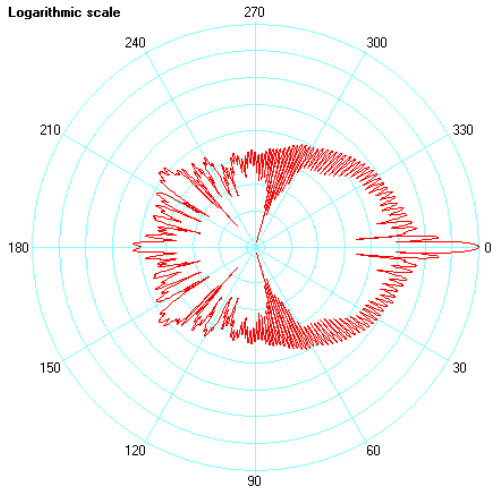
$r \ll \lambda$ Tend vers la diffusion Rayleigh

$r \gg \lambda$ Tend vers l'optique géométrique



Fonction de phase

- **Complexe** avec pic marqué vers l'avant et interférences multiples.
- Ne dépend que de Θ

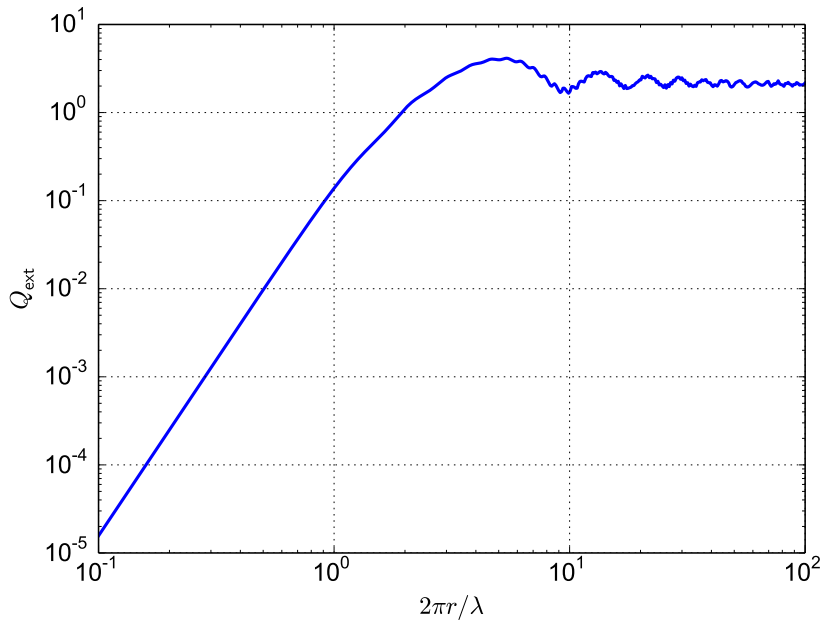


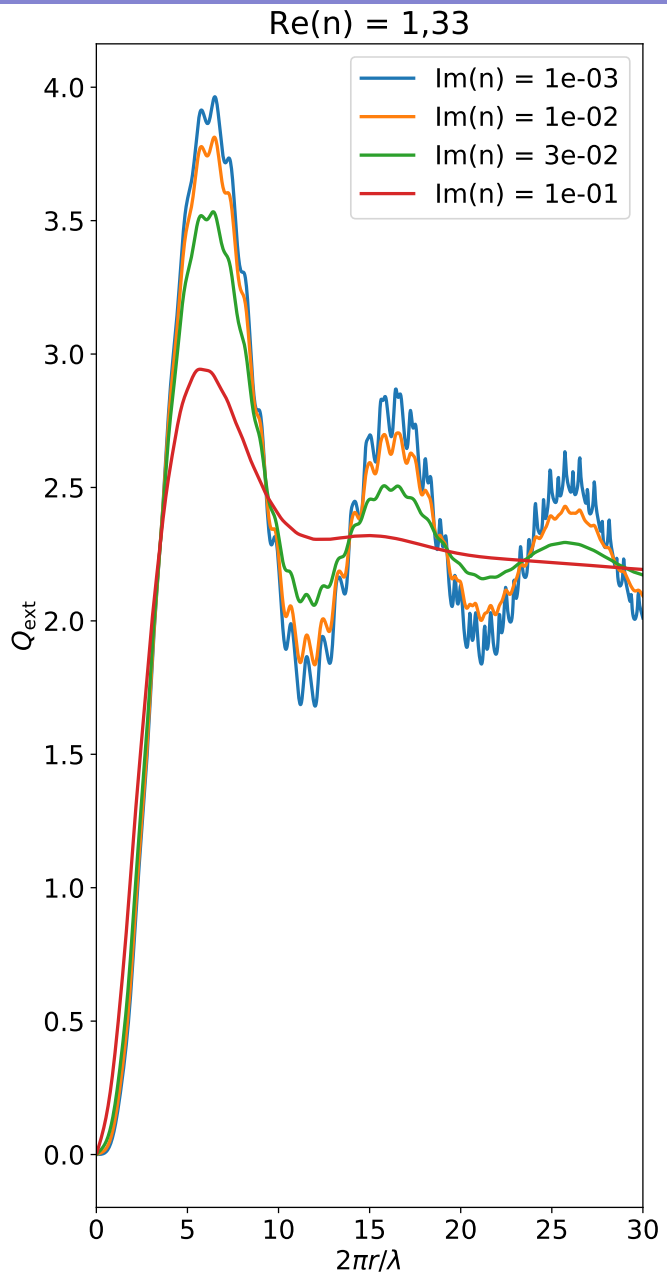
Paramètre de taille x

- $x = 2\pi r/\lambda$

Section efficace d'extinction σ_{ext}

- $x \ll 1$: $\sigma_{\text{ext}} \propto \lambda^{-4}$ (Rayleigh)
- $x \gg 1$: $Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}}/\pi r^2 \to 2$!
- Q_{ext} maximal pour $r \approx \frac{\lambda}{\pi|n-1|} \approx \lambda$
  Pour un nuage d'eau, τ_{ext} maximal quand $r \simeq \lambda$.

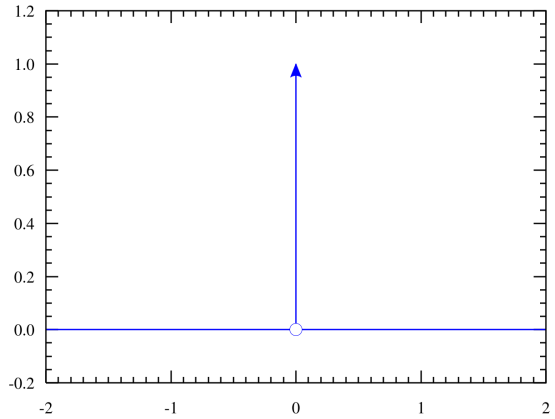




Définition

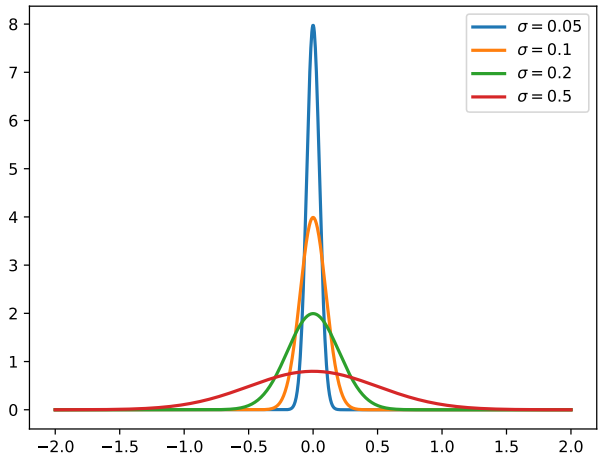
$\delta(x)$ est une distribution telle que :
$\forall f(x)$ intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$



Interprétation

- $\delta(x)$ peut être vue comme une ≪ fonction-limite ≫ :
  - Nulle pour $x \neq 0$
  - Infinie en $x = 0$
  - Telle que $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 1$
- Utile pour décrire des phénomènes concentrés autour de l'origine.
- **Attention** : $\delta(x)$ a la dimension inverse de celle de x !



Lumière incidente collimatée

- Direction d'incidence $\mu = -\mu_0 < 0$ pour la lumière solaire et d'azimut φ_0
- En $\tau = 0$, on a donc $I(0;\mu,\varphi) = F_0 \delta(\mu+\mu_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$.

Équation pour le faisceau direct

$$I_{\text{direct}} = F_0 \delta(\mu+\mu_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,e^{-\tau/\mu_0}$$

Équation pour les faisceaux diffusés

$$\begin{aligned}\mu \frac{dI_{\text{dif}}}{d\tau} =& I_{\text{dif}} - (1-\varpi_0) B_\nu - \varpi_0 \iint I_{\text{dif}}(\mu',\varphi') p(\mu',\varphi';\mu,\varphi)\, d\mu'\, d\varphi' \\ & - \varpi_0 F_0 p(-\mu_0,\varphi_0;\mu,\varphi) e^{-\tau/\mu_0}\end{aligned}$$

En isotrope ($p = \frac{1}{4\pi}$) :

$$\mu \frac{dI_{\text{dif}}(\mu)}{d\tau} = I_{\text{dif}}(\mu) - (1-\varpi_0) B_\nu - \frac{\varpi_0}{2} \int_{-1}^{1} I_{\text{dif}}(\mu')\, d\mu' - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0}$$

Diffusion non isotrope

- P est caractérisée par son paramètre d'asymétrie g défini par :

$$g = \langle \cos \Theta \rangle = 2\pi \int_{-1}^{1} \mu P(\mu)\, d\mu$$

- g est le premier moment de P

$g = -1$ diffusion exclusivement vers l'arrière.
$g = 0$ $\Leftarrow$ diffusion isotrope (mais $\not\Rightarrow$! cf. diffusion Rayleigh)
$g = 1$ diffusion exclusivement vers l'avant (donc pas de diffusion !)

Résolution

- On considère qu'une fraction $(1 - g)$ du rayonnement est diffusée de façon isotrope et une fraction g non diffusée.
- On peut alors remplacer τ et ϖ_0 par des équivalents isotropes τ' et ϖ_0'.
  - $\tau' = \tau\,(1 - g\varpi_0)$ et $\varpi_0' = \dfrac{(1-g)\,\varpi_0}{1 - g\varpi_0}$.

Résolution approchée du cas isotrope

- En l'absence de source thermique, on a :

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{\varpi_0}{2} \int_{-1}^{1} I(\mu)\, d\mu - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0}$$

Quadrature de Gauss

Pour toute fonction f suffisamment lisse sur $[-1;1]$, on a :

$$\int_{-1}^{1} f(\mu)\, d\mu \approx \sum_{j=-N}^{N} a_j f(\mu_j)$$

où les a_j et μ_j optimaux ne dépendent que de j et N. L'approximation est d'autant meilleure que N est grand.

N	μ_j	a_j
1	$\mu_{\pm1} = \pm 1/\sqrt{3}$	$a_{\pm1} = 1$
2	$\mu_{\pm1} \approx \pm 0.34$	$a_{\pm1} \approx 0.652$
	$\mu_{\pm2} \approx \pm 0.86$	$a_{\pm2} \approx 0.348$
3	$\mu_{\pm1} \approx \pm 0.239$	$a_{\pm1} \approx 0.468$
	$\mu_{\pm2} \approx \pm 0.661$	$a_{\pm2} \approx 0.361$
	$\mu_{\pm3} \approx \pm 0.932$	$a_{\pm3} \approx 0.171$

Approximation à deux faisceaux ($N = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{dI^+}{d\tau} = I^+ - \dfrac{\varpi_0}{2}\left(I^+ + I^-\right) - \dfrac{\varpi_0 F_0}{4\pi}e^{-\tau/\mu_0} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{dI^-}{d\tau} = I^- - \dfrac{\varpi_0}{2}\left(I^+ + I^-\right) - \dfrac{\varpi_0 F_0}{4\pi}e^{-\tau/\mu_0} \end{cases}$$

Approximation à deux faisceaux dans le cas non-isotrope

- On montre que :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{dI^+}{d\tau} = I^+ - \varpi_0\dfrac{1+g}{2}I^+ - \varpi_0\dfrac{1-g}{2}I^- - \dfrac{\varpi_0 F_0}{4\pi}\left(1-\sqrt{3}g\right)e^{-\tau/\mu_0} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{dI^-}{d\tau} = I^- - \varpi_0\dfrac{1+g}{2}I^- - \varpi_0\dfrac{1-g}{2}I^+ - \dfrac{\varpi_0 F_0}{4\pi}\left(1+\sqrt{3}g\right)e^{-\tau/\mu_0} \end{cases}$$

Atmosphère semi-infinie

Hypothèses

- Pas de rayonnement direct
  - Moyenne spatiale ou temporelle du flux solaire
- $I^-(\tau = 0) = I_0$; $I^+(\tau \to +\infty) = 0$
- On cherche des solutions en $e^{k\tau}$. Il faut donc trouver k.

Résolution

- Sans flux direct, système linéaire homogène en I^+ et I^- : $\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} I^+ \\ I^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{3}} + \frac{\varpi_0}{2} - 1 & \frac{\varpi_0}{2} \\ \frac{\varpi_0}{2} & -\frac{k}{\sqrt{3}} + \frac{\varpi_0}{2} - 1 \end{pmatrix}$
- Solutions non triviales (i.e. non nulles) si et seulement si : $\det \mathbf{M} = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3(1 - \varpi_0)$
- D'où $I^- = I_0 e^{-\sqrt{3(1-\varpi_0)}\tau}$ et $I^+ = \Lambda I_0 e^{-\sqrt{3(1-\varpi_0)}\tau}$

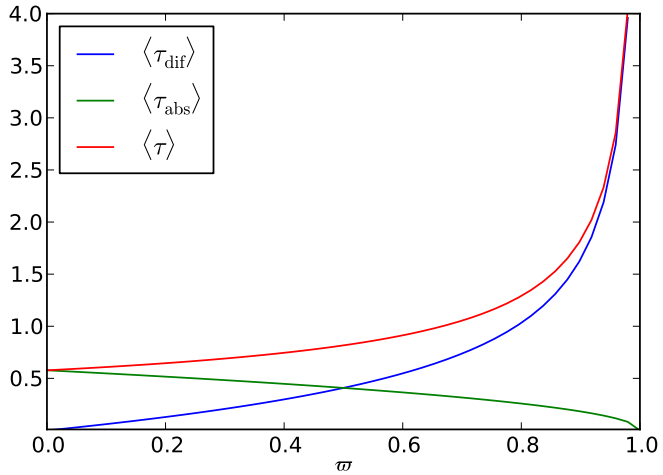
Albédo Λ

- En injectant I^+ et I^- dans l'équation différentielle en $dI^-/d\tau$, on obtient : $\sqrt{1-\varpi_0} = (1 - \varpi_0/2) - \Lambda\varpi_0/2$
- Après manipulations algébriques, on obtient : $\Lambda = \dfrac{1 - \sqrt{1-\varpi_0}}{1 + \sqrt{1-\varpi_0}}$
- Λ est l'**albédo** d'une atmosphère/d'un nuage semi-infini éclairé de façon diffuse.

Sondages atmosphériques

Pénétration du rayonnement réfléchi

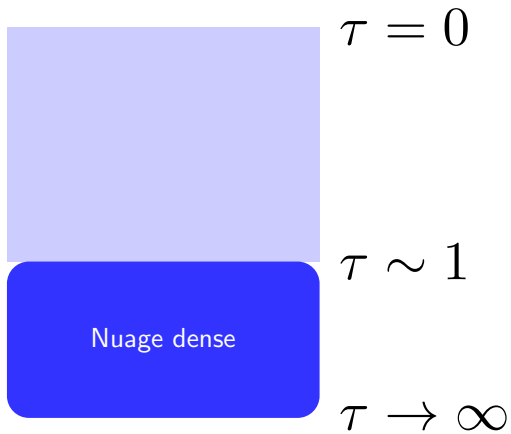
- $I^+(\tau)/I^+(0) = e^{-\sqrt{3(1-\varpi)}\tau}$: le rayonnement sortant a pénétré en moyenne jusque $\langle\tau\rangle = \frac{\int_0^\infty \tau e^{-k\tau}\,d\tau}{\int_0^\infty e^{-k\tau}\,d\tau} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\varpi)}}$
- Alors, $\langle\tau_{\text{dif}}\rangle = \varpi\,\langle\tau\rangle = \frac{\varpi}{\sqrt{3(1-\varpi)}}$ et $\langle\tau_{\text{abs}}\rangle = (1-\varpi)\,\langle\tau\rangle = \sqrt{\frac{1-\varpi}{3}}$
  - Si ϖ décroît (absorption gazeuse par exemple), on sonde moins profond.



Sondages possibles

Profil d'absorption connu Mesure des propriétés de diffusion (ϖ, densité de diffuseurs, ...)

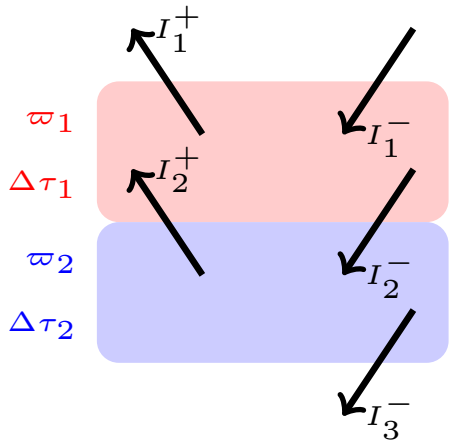
Profil de diffusion connu Mesure du profil vertical d'absorption.

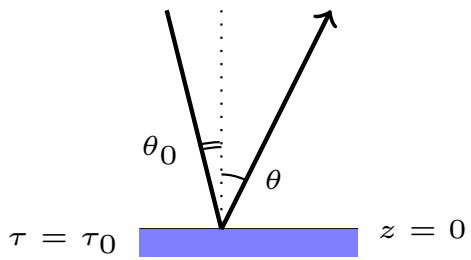


Atmosphère inhomogène

- On résout le problème par **découpage en couches** homogènes en calculant coefficients de réflexion R_i et de transmission T_i
  - Pour le cas semi-infini, $T = 0$ et $R = \Lambda$
- On combine ensuite les couches deux par deux et on itère (*adding method*) :

$$R_{1+2} = R_1 + \frac{{T_1}^2 R_2}{1 - R_1 R_2} \; ; \; T_{1+2} = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}$$



Nuage/surface réfléchissante + atmosphère non diffusante ($\tau_{\text{dif}} = \varpi\tau \ll 1$)

- On a alors : $I_\nu(0) = R(\mu,\varphi;\mu_0,\varphi_0) I_0 e^{-\tau_\nu \left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu}\right)}$
- Mesure de :
  $$\tau_\nu = \int_0^\infty \sigma_\nu n(z)\,dz = \sum_i \sigma_\nu^i \int_0^\infty n_i(z)\,dz = \sum_i \sigma_\nu^i a_i$$
- **Accès à la densité de colonne $a_i = \int_0^\infty n_i(z)\,dz$ de l'absorbant i.**