

Transfert de rayonnement III Transfert radiatif avec diffusion

Emmanuel Marcq

LATMOS, Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines

M2 Planétologie et Exploration Spatiale – 2024-2025

Nature physique de la diffusion

- L'interaction entre la matière et une onde électromagnétique incidente peut en détourner une partie vers une autre direction.
- Diffusion à la même fréquence que le champ incident : **diffusion cohérente**
- Introduit une **extinction** supplémentaire, en plus de l'absorption (où l'énergie électromagnétique incidente est convertie en d'autres formes d'énergie).

Extinction

- **Extinction = Absorption + Diffusion**
- On note le coefficient linéique d'absorption $k_{\text{abs}} = d\tau_{\text{abs}}/ds$, le coefficient linéique de diffusion $k_{\text{sca}} = d\tau_{\text{sca}}/ds$ et celui d'extinction $k_{\text{ext}} = d\tau/ds$

Définition de ϖ (aussi noté ϖ_0)

$$\varpi = \frac{k_{\text{sca}}}{k_{\text{ext}}} = \frac{k_{\text{ext}} - k_{\text{abs}}}{k_{\text{ext}}} = \frac{k_{\text{sca}}}{k_{\text{sca}} + k_{\text{abs}}}$$

- $0 < \varpi < 1$ (sans unité)
 - $\varpi = 0$ Extinction entièrement due à l'absorption
Pas de diffusion.
 - $\varpi = 1$ Extinction entièrement due à la diffusion
Pas d'absorption
- ϖ est une fonction de la longueur d'onde/de la fréquence/du nombre d'onde : ϖ_λ ou ϖ_ν ou ϖ_σ .

Signification

- Décrit la **répartition angulaire** (θ', φ') des rayons diffusés par rapport à la direction du rayon incident (θ, φ) .
- C'est une **distribution de probabilité** $P(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$:

$$dP[(\theta, \varphi) \rightarrow (\theta', \varphi')] = P(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\Omega'$$

- Unité de P : sr^{-1}

Caractéristiques

- **Normation**

$$\iint_{\theta', \varphi'} P(\theta, \varphi; \theta', \varphi') d\Omega' = \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^1 P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' = 1$$

- En général, P ne dépend que (du cosinus) de l'angle Θ entre le rayon incident et le rayon diffusé : $P(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = p(\cos \Theta)$.
 - En convention usuelle plan-parallèle, on a :
 $\cos \Theta = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \cos(\varphi' - \varphi)$.
 - Exemple : diffusion isotrope, $p(\cos \Theta) = \frac{1}{4\pi} \text{sr}^{-1}$.

Autre convention (P sans unité)

$dP = P d\Omega \times 4\pi \text{sr}$. En ce cas, $\iint P d\Omega' = 4\pi \text{sr}$ et $p = 1$ pour la diffusion isotrope.

Nouvelle forme du terme source S_ν

- Loi de Kirchhoff émissivité $(1 - \varpi) < 1$ pour la source thermique
- Contribution diffuse tout rayon (μ', φ') **peut** être en partie diffusé dans la direction du rayon étudié.

$$I_\nu(0; \mu, \varphi) = I_\nu(\tau_\nu^*; \mu, \varphi) e^{-\tau_\nu^*/\mu} + \int_{\tau_\nu^*=0}^{\tau_\nu^*} S_\nu(\tau'_\nu; \mu, \varphi) e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} \frac{d\tau'_\nu}{\mu}$$

avec

$$S_\nu(\tau_\nu; \mu, \varphi) = (1 - \varpi) B_\nu [T(\tau_\nu)] + \varpi \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu; \mu', \varphi') P(\mu', \varphi'; \mu, \varphi) d\mu' d\varphi'$$

Problème

- Les différents rayons se mélangent les uns aux autres.
- Résolution simultanée pour toutes les directions : **Pas de solution explicite en général !**
 - Mais émission thermique très souvent négligeable aux courtes longueurs d'onde (où la diffusion devient importante).

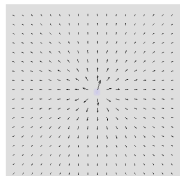
Lorsque les particules diffusives sont de taille **très inférieure** à λ .

$$P(\Theta) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \Theta)$$

$$\sigma_\lambda = \frac{128\pi^5 \alpha^2}{3\lambda^4}$$

α : polarisabilité des particules diffusives.

- **Dépendance en λ^{-4}** : les courtes longueurs d'onde sont davantage affectées.
- Diffusion **polarisante, non isotrope**.
- Exemple typique : bleu du ciel.



Section efficace σ_λ

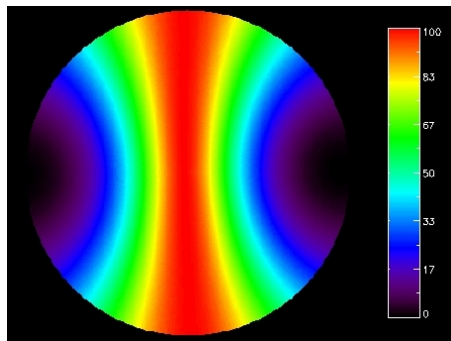
- He (minimal)
 $5,8 \cdot 10^{-30} \text{ cm}^2 / \lambda^4 [\mu\text{m}]$
- CO₂ (maximal)
 $8,8 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2 / \lambda^4 [\mu\text{m}]$
- **Négligeable** pour
 $\lambda > 1 \mu\text{m}$ et $P < 10 \text{ bar}$

Polarisation

- Degré de polarisation
linéaire δ en simple
diffusion :

$$\delta = \frac{\sin^2 \Theta}{1 + \cos^2 \Theta}$$

- Maximal à angle droit de
la direction de la source



*Degré de polarisation linéaire Rayleigh [%]
avec source sur l'horizon*

Domaine d'application

- particules **sphériques** de rayon r quelconque par rapport à λ et d'indice de réfraction (complexe) connu.
- s'applique **très mal** aux particules non sphériques !

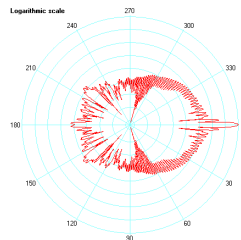
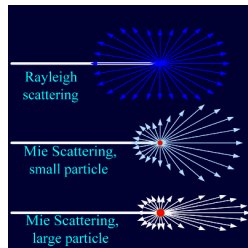
Exemples Aérosols : poussières, nuages

$r \ll \lambda$ Tend vers la diffusion Rayleigh

$r \gg \lambda$ Tend vers l'optique géométrique

Fonction de phase

- **Complexe** avec pic marqué vers l'avant et interférences multiples.
- Ne dépend que de Θ

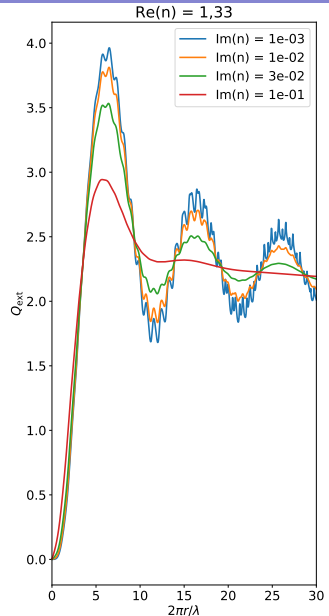
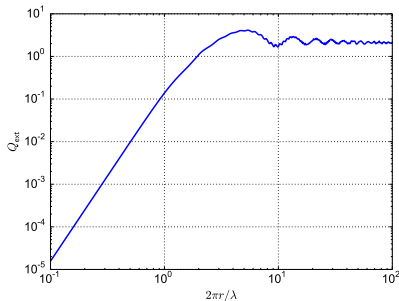


Paramètre de taille x

- $x = 2\pi r/\lambda$

Section efficace d'extinction σ_{ext}

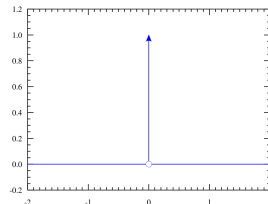
- $x \ll 1 : \sigma_{\text{ext}} \propto \lambda^{-4}$ (Rayleigh)
- $x \gg 1 : Q_{\text{ext}} = \sigma_{\text{ext}}/\pi r^2 \rightarrow 2!$
- Q_{ext} maximal pour $r \approx \frac{\lambda}{\pi|n-1|} \approx \lambda$
Pour un nuage d'eau, τ_{ext} maximal quand $r \simeq \lambda$.



Définition

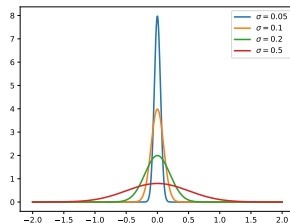
$\delta(x)$ est une distribution telle que :
 $\forall f(x)$ intégrable sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$



Interprétation

- $\delta(x)$ peut être vue comme une « fonction-limite » :
 - Nulle pour $x \neq 0$
 - Infinie en $x = 0$
 - Telle que $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1$
- Utile pour décrire des phénomènes concentrés autour de l'origine.
- **Attention** : $\delta(x)$ a la dimension inverse de celle de x !



Lumière incidente collimatée

- Direction d'incidence $\mu = -\mu_0 < 0$ pour la lumière solaire et d'azimut φ_0
- En $\tau = 0$, on a donc $I(0; \mu, \varphi) = F_0 \delta(\mu + \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$.

Équation pour le faisceau direct

$$I_{\text{direct}} = F_0 \delta(\mu + \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

Équation pour les faisceaux diffusés

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_{\text{dif}}}{d\tau} = & I_{\text{dif}} - (1 - \varpi_0) B_\nu - \varpi_0 \iint I_{\text{dif}}(\mu', \varphi') p(\mu', \varphi'; \mu, \varphi) d\mu' d\varphi' \\ & - \varpi_0 F_0 p(-\mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi) e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned}$$

En isotrope ($p = \frac{1}{4\pi}$) :

$$\mu \frac{dI_{\text{dif}}(\mu)}{d\tau} = I_{\text{dif}}(\mu) - (1 - \varpi_0) B_\nu - \frac{\varpi_0}{2} \int_{-1}^1 I_{\text{dif}}(\mu') d\mu' - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0}$$

Diffusion non isotrope

- P est caractérisée par son **paramètre d'asymétrie** g défini par :

$$g = \langle \cos \Theta \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 \mu P(\mu) d\mu$$

- g est le premier moment de P

$g = -1$ diffusion exclusivement vers l'arrière.

$g = 0 \Leftrightarrow$ diffusion isotrope (mais $\nRightarrow$! cf. diffusion Rayleigh)

$g = 1$ diffusion exclusivement vers l'avant (donc pas de diffusion !)

Résolution

- On considère qu'une fraction $(1 - g)$ du rayonnement est diffusée de façon isotrope et une fraction g non diffusée.
- On peut alors remplacer τ et ϖ_0 par des équivalents isotropes τ' et ϖ'_0 .

$$\bullet \quad \tau' = \tau (1 - g\varpi_0) \text{ et } \varpi'_0 = \frac{(1 - g) \varpi_0}{1 - g\varpi_0}.$$

Résolution approchée du cas isotrope

- En l'absence de source thermique, on a :

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{\varpi_0}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0}$$

Quadrature de Gauss

Pour toute fonction f suffisamment lisse sur $[-1; 1]$, on a :

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \approx \sum_{j=-N}^N a_j f(\mu_j)$$

où les a_j et μ_j optimaux ne dépendent que de j et N . L'approximation est d'autant meilleure que N est grand.

N	μ_j	a_j
1	$\mu_{\pm 1} = \pm 1/\sqrt{3}$	$a_{\pm 1} = 1$
2	$\mu_{\pm 1} \approx \pm 0.34$	$a_{\pm 1} \approx 0.652$
	$\mu_{\pm 2} \approx \pm 0.86$	$a_{\pm 2} \approx 0.348$
3	$\mu_{\pm 1} \approx \pm 0.239$	$a_{\pm 1} \approx 0.468$
	$\mu_{\pm 2} \approx \pm 0.661$	$a_{\pm 2} \approx 0.361$
	$\mu_{\pm 3} \approx \pm 0.932$	$a_{\pm 3} \approx 0.171$

Approximation à deux faisceaux ($N = 1$)

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI^+}{d\tau} = I^+ - \frac{\varpi_0}{2} (I^+ + I^-) - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI^-}{d\tau} = I^- - \frac{\varpi_0}{2} (I^+ + I^-) - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} e^{-\tau/\mu_0} \end{cases}$$

Approximation à deux faisceaux dans le cas non-isotrope

- On montre que :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI^+}{d\tau} = I^+ - \varpi_0 \frac{1+g}{2} I^+ - \varpi_0 \frac{1-g}{2} I^- - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} (1 - \sqrt{3}g) e^{-\tau/\mu_0} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI^-}{d\tau} = I^- - \varpi_0 \frac{1+g}{2} I^- - \varpi_0 \frac{1-g}{2} I^+ - \frac{\varpi_0 F_0}{4\pi} (1 + \sqrt{3}g) e^{-\tau/\mu_0} \end{cases}$$

Atmosphère semi-infinie

Hypothèses

- Pas de rayonnement direct
 - Moyenne spatiale ou temporelle du flux solaire
- $I^-(\tau = 0) = I_0$; $I^+(\tau \rightarrow +\infty) = 0$
- On cherche des solutions en $e^{k\tau}$. Il faut donc trouver k .

Résolution

- Sans flux direct, système linéaire homogène en I^+ et I^- :

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} I^+ \\ I^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{3}} + \frac{\varpi_0}{2} - 1 & \frac{\varpi_0}{2} \\ \frac{\varpi_0}{2} & -\frac{k}{\sqrt{3}} + \frac{\varpi_0}{2} - 1 \end{pmatrix}$$
- Solutions non triviales (i.e. non nulles) si et seulement si :

$$\det \mathbf{M} = 0 \Leftrightarrow k^2 = 3(1 - \varpi_0)$$
- D'où $I^- = I_0 e^{-\sqrt{3(1-\varpi_0)}\tau}$ et $I^+ = \Lambda I_0 e^{-\sqrt{3(1-\varpi_0)}\tau}$

Albédo Λ

- En injectant I^+ et I^- dans l'équation différentielle en $dI^-/d\tau$, on obtient : $\sqrt{1 - \varpi_0} = (1 - \varpi_0/2) - \Lambda\varpi_0/2$
- Après manipulations algébriques, on obtient : $\Lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - \varpi_0}}{1 + \sqrt{1 - \varpi_0}}$
- Λ est l'**albédo** d'une atmosphère/d'un nuage semi-infini éclairé de façon diffuse.

Sondages atmosphériques

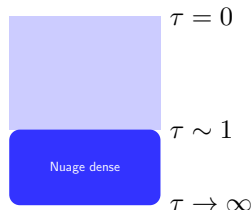
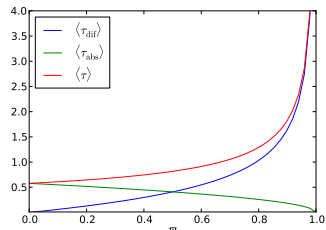
Pénétration du rayonnement réfléchi

- $I^+(\tau)/I^+(0) = e^{-\sqrt{3(1-\varpi)}\tau}$: le rayonnement sortant a pénétré en moyenne jusque $\langle \tau \rangle = \frac{\int_0^\infty \tau e^{-k\tau} d\tau}{\int_0^\infty e^{-k\tau} d\tau} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\varpi)}}$
- Alors, $\langle \tau_{\text{dif}} \rangle = \varpi \langle \tau \rangle = \frac{\varpi}{\sqrt{3(1-\varpi)}}$ et $\langle \tau_{\text{abs}} \rangle = (1 - \varpi) \langle \tau \rangle = \sqrt{\frac{1-\varpi}{3}}$
 - Si ϖ décroît (absorption gazeuse par exemple), on sonde moins profond.

Sondages possibles

Profil d'absorption connu Mesure des propriétés de diffusion (ϖ , densité de diffuseurs, ...)

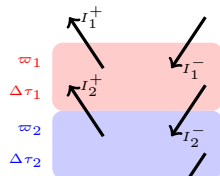
Profil de diffusion connu Mesure du profil vertical d'absorption.



Atmosphère inhomogène

- On résout le problème par **découpage en couches** homogènes en calculant coefficients de réflexion R_i et de transmission T_i
 - Pour le cas semi-infini, $T = 0$ et $R = \Lambda$
- On combine ensuite les couches deux par deux et on itère (*adding method*) :

$$R_{1+2} = R_1 + \frac{T_1^2 R_2}{1 - R_1 R_2} ; T_{1+2} = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}$$



Nuage/surface réfléchissante + atmosphère non diffusante ($\tau_{\text{dif}} = \varpi \tau \ll 1$)

- On a alors : $I_\nu(0) = R(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) I_0 e^{-\tau_\nu \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \right)}$
- Mesure de :
$$\tau_\nu = \int_0^\infty \sigma_\nu n(z) dz = \sum_i \sigma_\nu^i \int_0^\infty n_i(z) dz = \sum_i \sigma_\nu^i a_i$$
- Accès à la densité de colonne $a_i = \int_0^\infty n_i(z) dz$ de l'absorbant i .

